I La mesure

I.1 Grandeurs Physiques

Une grandeur physique (longueur, durée, masse par exemple) est une caractéristique d'un objet ou d'un phénomène qu'on peut **mesurer expérimentalement**. Ceci signifie qu'on peut décrire un protocole permettant de caractériser **l'égalité** et de déterminer **le rapport** des valeurs de cette grandeur dans deux objets différents.

Exemple :
La masse est une grandeur mesurable puisqu'on peut vérifier l'égalité de deux masses au moyen d'une balance à fléau et déterminer le rapport de deux masses au moyen d'une balance (romaine pour le plus simple).

La grandeur est alors dite **mesurable**. C'est le sens du signe = en sciences physiques, dont on constate ici l'origine fondamentalement expérimentale.

Effectuer une mesure de la valeur X d'une grandeur d'un objet ou phénomène c'est déterminer le rapport entre X et la valeur d'une grandeur de référence X_0, définie elle aussi expérimentalement. Ainsi, dire que « la valeur de la masse de cette pomme est 100 g » signifie que le quotient, déterminé expérimentalement, de la valeur de la masse de la pomme par la valeur d'une masse de référence, servant à définir le gramme, vaut 100 [i].

Remarque :
Jusqu'à maintenant nous avons distingué la grandeur physique (la grandeur masse par exemple), de sa valeur dans une réalisation expérimentale particulière (la masse d'un objet). Par la suite, le nom de la grandeur aura les deux sens : on dira aussi bien « la masse d'une pomme » que « la masse ».

I.2 Grandeurs fondamentales

Le **système international d'unités** utilise cinq **grandeurs fondamentales indépendantes**, permettant d'exprimer toutes les grandeurs physiques par produit et quotient :

longueur (symbole L)	durée (T)	masse (M)	intensité (I)	température (t).

Exemple :
Une vitesse, grandeur non fondamentale, s'exprime comme le quotient de deux grandeurs fondamentales : une longueur et une durée.

Conjointement, il est nécessaire de définir une unité[ii] pour chacune de ces grandeurs (la « valeur » d'un étalon), résumées dans le tableau Tab. 1. Celles-ci sont, dans le système international (noté *SI*), au nombre de sept. En effet les deux unités supplémentaires, la mole et la candéla font intervenir, en plus des cinq grandeurs fondamentales, des nombres sans dimension caractéristiques d'objets particuliers : un atome de carbone pour la mole, et la sensibilité humaine de l'œil pour la candéla.

On peut également définir des unités, non fondamentales, pour les grandeurs non fondamentales.

Exemple :
- le hertz, unité de fréquence, de symbole Hz, s'exprime en fonction des unités fondamentales selon $1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$,
- la dioptrie, utilisée en optique géométrique, de symbole δ, avec $1\,\delta = 1\,\mathrm{m}^{-1}$,
- le newton, unité de force, de symbole N, avec $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

[i] En pratique on compare dans le cas d'une pesée l'égalité de la masse à mesurer à celle d'un ensemble de masses mesurées au préalable.
[ii] Les termes de leurs définitions légales seront expliquées le moment venu.

Grandeur	Symbole	Unité	Définition (jusqu'en 2018)
longueur	L	mètre (m)	Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 seconde.
durée	T	seconde (s)	La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.
masse	M	kilogramme (kg)	Le kilogramme est la masse du prototype international, réalisé en platine allié à 10 pour 100 d'iridium, à 0,0001 près, conservé au Bureau International des Poids et Mesures, à Sèvres.
courant électrique	I	ampère (A)	L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2\cdot10^{-7}$ N par mètre de longueur.
température	t	kelvin (K)	Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.
quantité de matière	N	mole (mol)	La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.
intensité lumineuse	I_v	candéla (cd)	La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540\cdot10^{12}$ Hz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian.

Tab. 1 : Grandeurs fondamentales et unités de base du système SI jusqu'en 2018.

I.3 Révision du système SI

I.3.a Valeurs de constantes fondamentales rendues exactes

Le Bureau International des Poids et Mesures a changé, en 2019, les définitions de ces unités [iii] pour que chacune soit désormais universelle. Ceci nécessite en particulier d'attribuer explicitement des valeurs **exactes** (*ie* qui n'ont pas à être mesurées) à certaines constantes physiques (voir le tableau 2).

constante	symbole	valeur
fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$9\,192\,631\,770\,\mathrm{Hz}$
vitesse de la lumière dans le vide	c	$299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
constante de Planck	h	$6{,}626\,070\,15\cdot10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$
charge élémentaire	e	$1{,}602\,176\,634\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$
constante de Boltzmann	k_{B}	$1{,}380\,649\cdot10^{-23}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$
constante d'Avogadro	N_{A}	$6{,}022\,140\,76\cdot10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$
efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540\cdot10^{12}\,\mathrm{Hz}$	K_{cd}	$638\,\mathrm{lm}\cdot\mathrm{W}^{-1}$

Tab. 2 : Valeurs explicites des constantes du système SI depuis 2019.

I.3.b Définition des unités fondamentales

Avec ces valeurs des constantes il n'est plus besoin d'invoquer une expérience particulière pour les définitions des unités fondamentales. En particulier, on a :

[iii] voir https ://www.bipm.org/fr/measurement-units/rev-si/

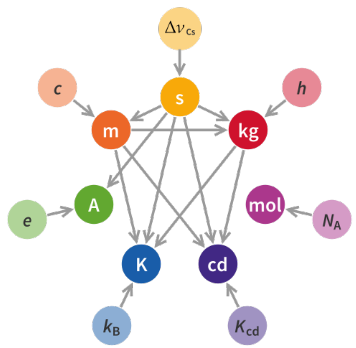
- « La seconde, symbole s, est l'unité de temps du SI. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de la fréquence du césium, $\Delta\nu_{Cs}$, la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, égale à 9 192 631 770 lorsqu'elle est exprimée en Hz, unité égale à s^{-1} ».

- « Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, h, égale à $6{,}626\,070\,15\cdot 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en $kg\cdot m^2\cdot s^{-1}$, le mètre et la seconde étant définis en fonction de c et $\Delta\nu_{Cs}$ ».

- « L'ampère, symbole A, est l'unité du courant électrique ; sa valeur est définie en fixant la valeur numérique de la charge élémentaire à exactement $1{,}602\,176\,634\cdot 10^{-19}$ quand elle est exprimée en $A\cdot s$, ce qui correspond à des C. »

- « Le kelvin, symbole K, est l'unité thermodynamique de température ; sa valeur est définie en fixant la valeur numérique de la constante de Boltzmann à exactement $1{,}380\,649\cdot 10^{-23}$ quand elle est exprimée en $m^2\cdot kg\cdot s^{-2}\cdot K^{-1}$, ce qui correspond à des $J\cdot K^{-1}$. »

Le schéma ci-contre[iv] illustre la manière dont la définition d'une unité dépend des valeurs de différentes constantes. La fréquence de transition du Cs $\Delta\nu_{Cs}$ suffit par exemple à définir la seconde mais la définition du kelvin fait appel, aux valeurs des constantes c et h en plus de celle de $\Delta\nu_{Cs}$.



Les phénomènes physiques particuliers qui servaient jusqu'à présent à définir certaines unités mettent maintenant en jeu des valeurs qu'il conviendra de mesurer. Par exemple :

- « la masse du prototype international du kilogramme, $m(K)$, est égale à 1 kg incertitude-type relative égale à celle de la valeur recommandée de h au moment de l'adoption de la présente résolution, à savoir $1{,}0\cdot 10^{-8}$; dans le futur, sa valeur sera déterminée de façon expérimentale »

- « la température thermodynamique du point triple de l'eau, T_{TPW}, est égale à 273,16 K avec une incertitude-type relative presque égale à celle de la valeur recommandée de k au moment de l'adoption de la présente résolution, à savoir $3{,}7\cdot 10^{-7}$; dans le futur, sa valeur sera déterminée de façon expérimentale »

En revanche puisque la constante d'Avogadro et celle Boltzmann sont fixées, la constante des gaz parfaits, qui en est le produit, devient elle-aussi fixée à la valeur :

$$R = k_B N_A = 8{,}314\,462\,618\,153\,24\,J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}$$

[iv] Par Wikipetzi, IngenieroLoco — Travail personnel. Based on File :Relations between new SI units definitions.png, CC BY-SA 4.0, https ://commons.wikimedia.org/w/index.php ?curid=40278935

I.4 Équations aux dimensions

Les définitions des valeurs des constantes font intervenir des grandeurs dont l'unité n'est pas une unité fondamentale. Par exemple la constante de Planck h s'exprime en $J\cdot s = kilogm^2/s$. On établit ces égalités à l'aide « d'équations aux dimensions ».

Désignons par A la valeur d'une grandeur physique. La grandeur elle-même sera notée $[A]$ et on notera son expression en fonction des grandeurs fondamentales sous la forme d'une égalité. Dans le cas de la valeur d'une force désignée par F, on écrira :

$$[F] = M.L.T^{-2}$$

On exprime ainsi qu'une force à la **dimension** du produit d'une masse par une longueur divisée par le carré d'une durée : il s'agit bien ici d'une égalité entre grandeurs physiques[v].

La nature même de l'égalité de deux grandeurs impose que les dimensions des grandeurs A et B dans l'expression $A = B$ sont nécessairement égales :

$$A = B \Rightarrow [A] = [B].$$

Cette égalité entre grandeurs, ou dimensions, est nommée **équation aux dimensions**. On dispose ainsi d'un moyen très pratique de vérifier la vraisemblance d'un résultat après calculs : les dimensions des grandeurs figurant de chaque côté du signe = doivent être les mêmes. On dit qu'on **vérifie l'homogénéité** du résultat.

La dimension d'un produit ou quotient de grandeurs est bien évidemment le produit ou le quotient des dimensions des grandeurs intervenant.

Exemple :
La deuxième loi de Newton affirme qu'un objet de masse inerte m soumis à une force $\vec{F}$ est animé d'une accélération $\vec{a}$ telle que :

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

La dimension de la masse m est M, celle d'une accélération $L.T^{-2}$, cette égalité est bien homogène (*ie* elle a bien un sens physique) puisque les dimensions des deux membres de l'équation sont les mêmes : $M.L.T^{-2}$. Remarquons au passage qu'on a ici utilisé cette équation aux dimensions sur des vecteurs : l'homogénéité impose dans ce cas que les dimensions des composantes des deux membres de l'égalité vectorielle soient égaux deux à deux.

La dimension d'une dérivée $\frac{df}{dx}$ est de même le quotient des dimensions de f et x : en effet la dérivée est définie comme la limite quand Δx tend vers 0 du taux d'accroissement $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, qui est un quotient d'une grandeur homogène à f par une grandeur homogène à x. Ce résultat se retrouve en lisant l'expression $\frac{df}{dx}$ comme le quotient de $\mathrm{D}f$ par $\mathrm{D}x$.

De la même manière, la dimension de $\int f(x)\mathrm{D}x$ est le produit des dimensions de f et de x.

Exemple :

- pour la vitesse, on a : $v = \frac{dx}{dt}$ et $[v] = L.T^{-1} = \frac{[x]}{[t]}$.
- pour le travail, on a $W = \int F\mathrm{D}l$, soit $[W] = kg\cdot m\cdot s^{-2}\times m = kg\cdot m^2\cdot s^{-2}$ *ie* $1\,J = 1\,kg\cdot m^2\cdot s^{-2}$
- pour la puissance, on a $\mathscr{P} = \frac{d\mathscr{E}_{cin}}{dt}$ soit $[\mathscr{P}] = [W]/T = kg\cdot m^2\cdot s^{-3}$, *ie* $1\,W = 1\,kg\cdot m^2\cdot s^{-3}$.

☠ On ne peut **sommer que des grandeurs ayant la même dimension** : une expression de la forme $A+B$ où A est une longueur et B une durée n'a aucun sens. Il est très important de vérifier la dimension de chaque expression : vous éviterez ainsi facilement un grand nombre d'erreurs.

[v] On utilisera souvent, par abus de notation bien commode, le symbole de l'unité pour désigner la grandeur : par exemple kg pour M. L'équation aux dimensions précédentes s'écrit alors : $[F] = kg\cdot m\cdot s^{-2}$.

II Incertitudes-types

II.1 Précision et justesse

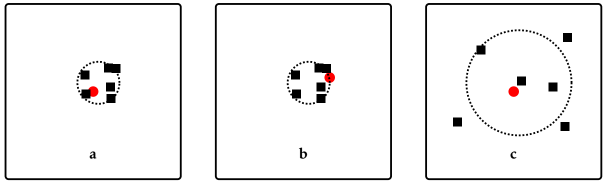
La mesure expérimentale de la grandeur (ou plutôt de la valeur de la grandeur) d'un objet est toujours entachée d'une certaine incertitude. On en distingue deux sources :

Imprécision Une mesure est dite **imprécise** si la répétition de la même mesure avec le même appareil et le même protocole ne donne pas exactement le même résultat. Par exemple la simple mesure de la longueur d'une barre à l'aide d'une règle pourra donner des résultats différents, la cause pouvant en être l'épaisseur finie des traits, la difficulté de pointer précisément des longueurs entre deux graduations…

Fausseté Même si la mesure est très précise, la valeur mesurée dépendra de l'appareil de mesure : un mètre mesuré sur une règle ne sera pas exactement le mètre défini légalement (parce que la fabrication de la règle n'est pas infiniment précise, parce qu'elle a pu s'user…). On dit alors que la **justesse** de la mesure est faible.

La figure ci-dessous illustre les différences entre ces notions. On y a représenté différents résultats de mesure. Dans chaque cas, le symbole ● représente la valeur exacte (on dit aussi vraie) et les symboles ▪ les valeurs mesurées. Le cercle ◌ représente un intervalle de confiance estimé à partir des mesures réalisées.

Les données a correspondent donc à une mesure précise et juste, les données b à une mesure aussi précise mais peu juste, et les données c à une mesure juste mais peu précise.



a b c

II.2 L'erreur est inconnue

L'erreur, c'est-à-dire l'écart entre la vraie valeur et la mesure qui en est faite ne peut être connue puisque ses causes n'en sont pas maîtrisables. On peut néanmoins, et on doit, estimer l'incertitude d'une mesure au moyen d'une «incertitude-type».

III Traitement statistique : incertitude de type A

III.1 Erreurs systématiques et aléatoires

Les erreurs commises lors d'une mesure peuvent être de deux types :

Systématique Erreur identique commise à chaque mesure, par exemple liée à un défaut de l'appareil de mesure (un pèse-personne non horizontal indiquera toujours un poids inférieur au poids réel), ou au protocole de mesure (il vaut mieux se déshabiller pour mesurer son poids).

Aléatoire L'erreur est différente à chaque mesure. Par exemple :

- en raison des frottements, le poids indiqué par le pèse-personne pourra varier en fonction de la vitesse avec laquelle on s'y installe,
- sur des balances de précision un courant d'air peut exercer une pression ou une dépression sur le plateau et affecter la mesure du poids.

Les erreurs systématiques peuvent être corrigées, mais seulement si elles sont décelées. On peut en revanche espérer compenser les erreurs aléatoires en répétant la mesure un grand nombre de fois pour en déterminer la moyenne. Sur 100 pesées par exemple, on peut espérer que l'effet de courants d'air aléatoires se moyennera à zéro. Il est donc intéressant d'effectuer un traitement statistique des mesures.

III.2 Écart-type

On reproduit N fois la mesure d'une grandeur m et on note $m_i, i = 1..N$ les valeurs obtenues. On définit la valeur moyenne :

$$\overline{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i, \tag{1}$$

et l'écart type :

$$s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i - \overline{m}\right)^2}, \tag{2}$$

ie la racine carrée de la moyenne des erreurs au carré. L'écart-type caractérise ainsi la précision du protocole de mesure : plus celui-ci est faible, plus la mesure est précise. On détermine ainsi ce qu'on nomme **l'incertitude de type A**.

Comme on n'effectue qu'un nombre limité de mesures, on n'obtient qu'une estimation empirique de la moyenne et de l'écart-type véritables, dont la détermination nécessiterait une infinité de mesures. On peut montrer que l'estimation précédente de l'écart-type tend à le sous-estimer. Pour cette raison, on utilisera plutôt l'écart type dit corrigé, défini par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i - \overline{m}\right)^2}, \tag{3}$$

plus juste[vi].

Vérifiez dans les fonctions statistiques de votre calculatrice comment calculer s et surtout σ.

Dans toute la suite, on confondra implicitement le véritable écart-type et son estimation par l'écart-type corrigé. On le notera σ. C'est cet écart-type que représentera l'incertitude-type qu'on cherche à évaluer.

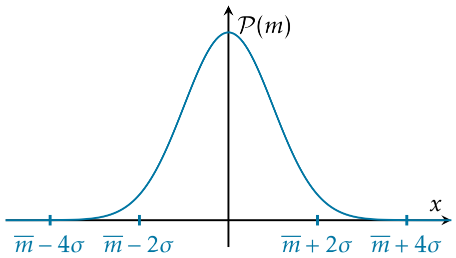
III.3 Intervalle de confiance et loi normale

On définit également un **intervalle de confiance** Δm, en indiquant que, par exemple, 95% des résultats obtenus le seront dans un intervalle $[\overline{m} - \Delta m_{95}, \overline{m} + \Delta m_{95}]$. Cet intervalle de confiance sera relié à l'écart-type.

[vi] Il présente également l'avantage de ne pas être défini pour $N = 1$, contrairement à σ. Il serait en effet gênant de pouvoir estimer la précision statistique d'un protocole en n'utilisant qu'une seule mesure…

Pour illustrer cette relation, supposons que la répartition des erreurs soit connue[a]. Pour des résultats prenant des valeurs continues, cette répartition doit être décrite par une **densité de probabilité** $\mathscr{P}(m)$ telle que la probabilité d'obtenir un résultat dans un petit intervalle dm autour de m soit $\mathscr{P}(m)dm$. Prenons l'exemple d'une fonction de répartition dite **normale** (basée sur la fonction nommée **gaussienne**), fondamentale en probabilités :

$$\mathscr{P}(m) = \frac{1}{\sigma_m\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(m-\overline{m})^2}{2\sigma_m^2}\right),$$



[a] Bien sûr, ce ne sera jamais le cas pour des erreurs expérimentales aléatoires.

On peut dans ce cas montrer que 95% des résultats obtenus le seront dans l'intervalle $[\overline{m}-2\sigma_m, \overline{m}+2\sigma_m]$, et que 99,7% le seront dans l'intervalle $[\overline{m}-3\sigma_m, \overline{m}+3\sigma_m]$.

De la même manière on peut définir un intervalle de confiance, à 95% ou à une autre valeur, pour toute fonction statistique de répartition des erreurs.

III.4 Intérêt de la loi normale, moyennes de grandeurs

Il existe un moyen de réduire arbitrairement l'écart type des résultats de mesure. Il suffit pour cela de calculer la moyenne m_N de N mesures, et étudier la répartition des valeurs m_N obtenues pour chaque série de N mesures (bien évidemment, la moyenne $\overline{m}_N$ est la même que la moyenne de mesures individuelles $\overline{m}$).

On montre alors (théorème de la limite centrale en mathématiques) que quelle que soit la fonction (suffisamment régulière) de répartition des erreurs des mesures individuelles $\mathscr{P}(m)$, d'écart-type σ :

- La fonction de répartition $\mathscr{P}(m_N)$ des moyennes m_N de N mesures tend, quand la taille N des échantillons tend vers l'infini vers la loi normale,
- dont l'écart-type σ_N est réduit d'un facteur $\sqrt{N}$:

$$\sigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

En effectuant des moyennes de 100 mesures, on obtiendra donc un écart-type réduit d'un facteur 10, et donc une précision 10 fois plus grande.

Pour cette raison, on utilisera dans ce cas comme incertitude-type :

$$\Delta X_A = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}.$$

De la même manière si les imprécisions d'une mesure résultent de plusieurs causes indépendantes, la répartition des erreurs globales suivra une distribution de loi normale quelles que soient les distributions des causes individuelles pour peu qu'elles soient assez nombreuses. En pratique, dès qu'on combine trois ou quatre sources d'erreurs, on constate que la distribution globale diffère peu d'une loi normale.

Ce théorème confère de plus un rôle prépondérant à la loi normale en statistiques : c'est pour cette raison qu'on raisonne le plus souvent comme si la répartition des erreurs était la loi normale, bien qu'elle soit inconnue[vii].

[vii] Seul un nombre infini de mesures permettrait de la déterminer

IV Comment présenter un résultat en Sciences Physiques ?

IV.1 Estimer l'incertitude avec une seule mesure : incertitude de type B

Vous aurez rarement le temps de répéter un grand nombre de fois la même mesure puis de traiter statistiquement les résultats obtenus pour déterminer l'incertitude de type A. Vous ne pourrez donc pas définir un intervalle de confiance statistique. Néanmoins vous devrez estimer l'incertitude-type ΔX_B sur les mesures que vous réaliserez, en considérant entre autres la précision de l'appareil et la fiabilité de votre technique de mesure. Par exemple, le pointé d'une position sur une règle vous assurera une incertitude-type de l'ordre de la demi-graduation. En effet, en supposant une distribution rectangulaire uniforme de largeur égale à une graduation, on peut montrer que :

$$\Delta X_B = \frac{1\text{ graduation}}{\sqrt{12}} \simeq 0{,}3 \times 1\text{ graduation}.$$

Cette estimation est nommée **incertitude de type B**.

IV.2 Incertitude-type composée : méthode analytique

Une mesure aura souvent plusieurs sources d'incertitudes : une éventuelle incertitude de type A, plusieurs incertitudes de type B. De plus on sera souvent amené à considérer l'incertitude-type sur une grandeur calculée à partir de différentes mesures, chacune affectée d'une incertitude type. On devra donc estimer une « incertitude-type composée ».

IV.2.a Somme ou différence de deux grandeurs

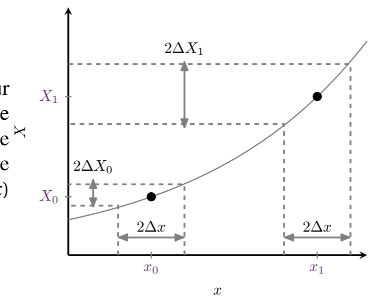
Supposons qu'on mesure les positions d_1 et d_2 pour en déduire la distance $D = d_2 - d_1$. Dans le cas très fréquent où les erreurs sur d_1 et d_2 (notées Δd_1 et Δd_2) ne sont pas corrélées, elle contribueront indépendamment à l'incertitude globale sur D. Une bonne estimation de l'incertitude de cette différence est :

$$\Delta D = \sqrt{\Delta d_1^2 + \Delta d_2^2}.$$

☠ : Les erreurs sont des grandeurs positives, qui doivent toujours s'ajouter, qu'on calcule la somme ou la différence de d_1 et d_2 puisqu'il n'y a aucune raison que l'erreur sur d_2 compense celle sur d_1. Dans le cas où X ne dépend que d'une seule mesure x, $X = f(x)$, c'est la dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ qui reliera les incertitudes sur X et x, selon :

$$\Delta X = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|\Delta x.$$

En effet, comme on l'illustre ci-contre, une variation de $\pm\Delta x$ autour d'un point x_0 induira une variation $\pm\Delta X_0$ autour de $X_0 = f(x_0)$, estimée par cette formule quand Δx est petit. On vérifie également que, sur le schéma ci-contre, l'incertitude ΔX_1 sur $X_1(x_1)$ est supérieure à celle en $X_0(x_0)$ bien que l'incertitude sur x soit la même car la dérivée $f'(x)$ prend une plus grande valeur au point x_1 qu'au point x_0.



IV.2.b Autres fonctions de plusieurs grandeurs

Dans le cas où X dépend de plusieurs variables, on fait appel à la notion de **dérivée partielle**. Considérons la fonction $X = F(x_1, x_2)$ donnant le résultat final X en fonction des résultats de mesure x_1, x_2. On peut dériver cette fonction F séparément par rapport à x_1 (resp. x_2), en considérant x_2 (resp. x_1) constante. On effectue ainsi la dérivée partielle de F, par rapport à x_1 (ou x_2), notée :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \text{lu « d rond F sur d rond } x_1\text{ ».}$$

Exemple :
Dans le cas du TP « focométrie », la distance focale f' recherchée dépend de deux longueurs D et d, selon : $f' = \frac{D^2-d^2}{4D}$, on a alors :

$$\frac{\partial f'}{\partial D} = \frac{1}{4} + \frac{d^2}{4D^2} \qquad \frac{\partial f'}{\partial d} = -\frac{d}{2D}.$$

Le calcul de l'incertitude sur F à partir de celles sur x_1 et x_2 est souvent très compliqué, on se contentera donc d'une estimation, valable quand les erreurs sur les différents x_i sont indépendantes et faibles en valeur relative. On « propage » alors pour cela les incertitudes de la même manière[viii] que précédemment selon :

$$\Delta X = \sqrt{\sum_i \left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\Delta x_i\right|^2} = \sqrt{\left|\frac{\partial F}{\partial D}\Delta D\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial d}\Delta d\right|^2}.$$

IV.2.c Erreur relative : cas particulier fondamental

On définira également **l'incertitude-type relative**, sans dimension :

$$\left|\frac{\Delta X}{X}\right|,$$

qu'on exprimera le plus souvent comme un pourcentage. On dira par exemple qu'une masse est connue à 10% près, si l'incertitude-type sur sa masse m est $0,1\,m$.

Si la fonction X s'exprime uniquement comme un produit ou quotient de puissances des valeurs x_i : $X = \prod_i x_i^{\alpha_i}$, l'erreur relative $\frac{\Delta X}{X}$ s'exprime simplement en fonction des erreurs relatives $\frac{\Delta x_i}{x_i}$. On peut en effet vérifier immédiatement que dans ce cas $\frac{\Delta X}{X} = \Delta \ln(X)$. Comme $\ln(X) = \sum_i \alpha_i \ln(x_i)$, on obtient :

$$\frac{\Delta X}{X} = \sqrt{\sum_i \left|\alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_i}\right|^2}.$$

Exemple :
Considérons la dilution d'une masse m, connue à 1% près, d'un composé de masse molaire M connue à 5% dans un volume V connu à 0,1%. La concentration de la solution obtenue est $c = \frac{m}{MV}$, et sa précision relative sera simplement $\sqrt{10^{-4} + (5.10^{-2})^2 + 10^{-6}} \simeq 5,1\%$.

Remarquons que si une des incertitudes relatives est significativement plus grande que toutes les autres, l'incertitude relative composée sera pratiquement égale à cette dernière comme on l'a constaté sur cet exemple où l'incertitude relative sur la masse molaire domine les autres.

[viii] Le cas précédent de la somme n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

IV.2.d Incertitude-type composée

Les différentes sources d'incertitudes-types (type A : ΔX_A, plusieurs type B : $\Delta X_{B1}, \Delta X_{B2}\dots$) ayant été déterminées, on les composera comme pour une somme d'erreurs indépendantes pour obtenir une incertitude-type **composée** :

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_A^2 + \Delta X_{B1}^2 + \Delta X_{B2}^2 \dots}.$$

IV.3 Utilisation du logiciel `Gum_MC`

Pour éviter des calculs parfois fastidieux, on pourra utiliser un logiciel donnant l'incertitude ΔX en fonction des incertitudes de type A ou B sur chacune des grandeurs mesurées. Le logiciel `Gum_mc` (librement disponible à l'adresse `http://jeanmarie.biansan.free.fr/gum_mc.html`) permet de choisir pour chacune de ces grandeurs un modèle différent de répartition des valeurs : « normal », rectangulaire (adapté pour la lecture sur une graduation)…

Le logiciel guide l'utilisat·eur·rice à chaque étape et donne l'incertitude-type sur la valeur X selon deux méthodes différentes :

- en effectuant le calcul analytique de la propagation des incertitudes,
- en utilisant des tirages aléatoires de valeurs mesurées (méthode dite Monte-Carlo).

IV.4 Présentation et incertitude relative

Une fois estimée l'incertitude-type composée ΔX comme précédemment, on peut présenter le résultat sous la forme :

$$X \pm \Delta X.$$

On préférera cependant utiliser **l'incertitude relative** p définie par

$$p \equiv \frac{\Delta X}{X}$$

en écrivant :

$$X \pm p\%.$$

On rencontrera parfois des **facteurs d'élargissement** par lesquels seront multipliées les incertitudes-types pour donner une information sur l'intervalle de confiance. Par exemple un coefficient d'élargissement $k = 2$ de l'écart-type statistique donne, pour une distribution donnée par la loi normale, un intervalle de confiance de 95% (voir III.3) en utilisant $\Delta X_k = k\Delta X$. On notera alors :

$$X \pm \Delta X_k \quad (k = 2).$$

Exemple :
Considérons la détermination de l'intensité I d'un courant par la mesure de la différence de potentiel U aux bornes d'une résistance R.

On a réalisé les $N = 9$ mesures suivantes de la tension au multimètre numérique :

U(V)	1,4450	1,4377	1,4331	1,4391	1,4319	1,4390	1,4409	1,4401	1,4379

incertitude-type de type A On calcule une valeur moyenne $\overline{U} = 1{,}4375\,\mathrm{V}$; un écart-type $\sigma_U = 3{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}$; et donc une incertitude-type $\Delta U_A = \sigma_U/\sqrt{N} = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}$.

incertitude-type de type B On pourrait tenir compte d'une incertitude liée à la température, à l'étalonnage de l'appareil…qui serait indiquée sur sa notice. On ne le fera pas ici par simplicité.

L'incertitude sur la tension est donc

$$\Delta U_A = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}.$$

En revanche, la valeur de la résistance $R = 1{,}00\,\Omega$ n'est le plus souvent précise qu'à 1% près. On utilisera donc une incertitude de type B :

$$\Delta R_B = 1 \cdot 10^{-2}\,\Omega.$$

Le simple calcul de l'intensité du courant donne $I = U/R = 1{,}4375\,\mathrm{A}$. On estime ensuite son incertitude-type relative selon :

$$\frac{\Delta I}{I} = \sqrt{\left|\frac{\Delta U_A}{U}\right|^2 + \left|\frac{\Delta R_B}{R}\right|^2} \simeq \sqrt{10^{-6} + 10^{-4}} \simeq 10^{-2}.$$

On écrira alors :

$$I = 1{,}44 \pm 0{,}01\,\mathrm{A} \quad \text{ou } I = 1{,}44(1)\,\mathrm{A} \quad \text{ou } I = 1{,}44 \pm 1\%\mathrm{A}$$

en arrondissant le résultat au dernier chiffre de l'ordre de grandeur de l'incertitude et en n'oubliant surtout pas de préciser l'unité.

Remarque :
On constate de nouveau ici que l'incertitude relative est pratiquement égale à celle sur la résistance puisque cette dernière est beaucoup plus grande que celle sur la tension.

IV.5 Comparaison de deux mesures et écart normalisé

On sera souvent amené à comparer différentes valeurs d'une même grandeur physique X, X_1 et X_2.

- par exemple la valeur tabulée (*ie* figurant dans la littérature scientifique) et la valeur mesurée au cours d'une séance de travaux pratiques de la masse volumique d'un métal ;
- ou les valeurs obtenues par deux protocoles expérimentaux différents de l'accélération de la pesanteur (vitesse en fonction de la hauteur de chute, période d'oscillation d'un pendule).

Pour vérifier la compatibilité de ces valeurs, on calculera l'**écart normalisé** EN. Si on a déterminé les incertitudes-types ΔX_1 et ΔX_2 pour les mesures différentes X_1 et X_2, on définit :

$$EN = \left|\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2}}\right|.$$

On compare ensuite la valeur de EN à 1.

- L'accord entre les deux résultats X_1 et X_2 sera d'autant meilleur que EN **est petit devant** 1.
- Une valeur de EN supérieure à 1 indique que les deux résultats sont **incompatibles** et signale une erreur dans le modèle utilisé, dans l'interprétation ou dans l'implémentation du protocole expérimental.